

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA “GALILEO GALILEI”
Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA

Elaborazione dell’informazione in un modello risolubile di diavoleto di Maxwell

Candidato:
Eleonora Martini
Matricola 1032538

Relatore:
Dott. Marco Baiesi

Anno Accademico 2014-2015

Indice

1	Introduzione	1
2	Il diavoletto e la sua dinamica	3
2.1	Descrizione del modello	3
2.2	La possibilità di compiere lavoro	5
2.3	Una variazione: diavoletto con due stati	10
3	L'elaborazione dell'informazione	13
3.1	Le diverse funzioni del diavoletto	13
3.2	La relazione fra lavoro ed entropia	15
4	Conclusioni	17
	References	19

Capitolo 1

Introduzione

Nelle ultime pagine della *Teoria del calore* del 1871 ([1]) Maxwell si interroga sulla natura del secondo principio della termodinamica e mette in evidenza un paradosso destinato ad alimentare speculazioni e ricerche fino ai giorni nostri. Le sue riflessioni riguardano la possibilità di conciliare i risultati che derivano dall'utilizzo di metodi statistici, cui siamo costretti a ricorrere per studiare i sistemi reali, costituiti da un enorme numero di molecole, con le idee che invece sono il frutto di indagini condotte con il metodo dinamico, ossia con la meccanica analitica.

Il ragionamento di Maxwell parte dalla constatazione che è impossibile che in un sistema isolato in equilibrio si produca una differenza di pressione o di temperatura senza la spesa di lavoro esterno. Questa impossibilità è sancita dal secondo principio della termodinamica, che è certamente valido nel momento in cui guardiamo le molecole che compongono il sistema nel loro insieme, non essendo capaci di osservarle singolarmente. In realtà sappiamo che, per esempio, in un gas racchiuso in un contenitore a temperatura uniforme le molecole non si muovono tutte alla medesima velocità, anche se raggruppamenti sufficientemente grandi di queste molecole mostreranno sempre lo stesso valore medio della velocità. Potremmo allora immaginare un essere in grado di seguire la traiettoria di ogni molecola e di utilizzare in qualche modo la non uniformità delle energie che invece sfugge ai nostri sensi.

Consideriamo un recipiente formato da due scomparti uguali che contengono gas alla stessa temperatura; nella parete divisoria c'è un foro e le molecole possono passare da una parte all'altra: in media attraverseranno il foro in entrambi i sensi tante molecole veloci quante lente, per cui a livello macroscopico questa migrazione non produrrà alcun effetto e la temperatura rimarrà uniforme. Supponiamo ora che l'essere immaginario di cui parlavamo, che Kelvin chiamerà diavoleto, stia di guardia al foro: egli conosce la velocità di ognuna delle molecole e può quindi aprire e chiudere il foro in modo tale da far passare in una direzione solo le molecole più veloci e nell'altra solo le più lente. Di conseguenza fra le due parti del recipiente si produce una differenza di temperatura, che può essere impiegata per ottenere lavoro, senza che sia stata spesa alcuna energia per generarla. È evidente che questo semplice esperimento mentale conduce ad un paradosso di notevole importanza, poichè insinua il dubbio che il secondo principio della termodinamica, che d'altra parte non è mai stato smentito nè dall'esperienza quotidiana nè dallo studio dei fenomeni fisici, derivi soltanto dal nostro approccio statistico allo studio dei sistemi e non abbia in realtà significato quando ci si riconduce ad una visione analitica.

Il punto chiave della questione sta in quella che potremmo chiamare l'intelligenza del diavoleto, cioè la sua capacità di vedere le molecole una alla volta e ad ogni istante acqui-

sire dati sulla velocità di ognuna: è grazie a questa conoscenza che il diavoleto è in grado di creare lo squilibrio di temperatura e diminuire così l'entropia del sistema, violando il secondo principio. Nel 1929 lo scienziato ungherese Leo Szilàrd pubblicò un lavoro intitolato *Sulla diminuzione di entropia in un sistema termodinamico per intervento di un essere intelligente* ([2]), nel quale suggeriva che per risolvere il paradosso di Maxwell era necessario incorporare nel quadro l'informazione. Secondo Szilàrd il diavoleto per raccogliere informazioni sulla traiettoria delle molecole e organizzarle nella propria mente deve spendere una certa energia. La memoria piena di informazioni del diavoleto, quindi, diviene una risorsa che a sua volta può essere utilizzata come un'energia per diminuire l'entropia del sistema. Nel bilancio finale l'aumento di entropia dell'ambiente, dovuto all'energia dissipata dal diavoleto per assimilare informazione, eccede la diminuzione che deriva dall'utilizzo di questa informazione, quindi il secondo principio della termodinamica viene rispettato. L'interpretazione di Szilàrd è stata ripresa da molti e si è diffusa la convinzione che sia in effetti possibile realizzare un dispositivo capace di trasformare le fluttuazioni di una sorgente in lavoro utile, a patto che durante il processo il dispositivo registri informazioni su una memoria fisica.

Un contributo fondamentale a questa linea di pensiero è dato dal principio di Landauer, formulato da Rolf Landauer nel 1961 ([3]). Secondo tale principio la cancellazione di informazione è un processo dissipativo: una certa quantità di calore, che non può essere ridotta oltre un determinato limite, viene necessariamente prodotta quando un bit classico di informazione viene eliminato, e come conseguenza di questa trasformazione irreversibile l'entropia dell'ambiente aumenta. In definitiva, dunque, i problemi legati all'elaborazione di informazioni ricadono nel campo della termodinamica. Nel 2011 è stata ottenuta la conferma sperimentale dell'esistenza del limite di Landauer ([4]), che fissa la minima energia necessaria per modificare il contenuto di un bit e vale $W = k_B T \ln 2$. Questo risultato costituisce una prova eccezionale della validità del secondo principio della termodinamica e lascia intendere che l'entropia associata all'informazione sia la risposta alle domande poste dal paradosso di Maxwell.

Il dispositivo meccanico ([5]) di cui discuteremo in questa tesi può essere definito un diavoleto poichè, proprio come l'essere immaginato da Maxwell, si serve delle fluttuazioni di una sorgente in equilibrio per compiere lavoro utile. Il modello, basato sul lavoro di scienziati che hanno elaborato le idee di Szilàrd, prevede che, per poter effettivamente produrre lavoro stando a contatto con una sola sorgente a temperatura uniforme, il dispositivo debba trascrivere informazione su una memoria fisica. Formalizzando la dinamica del dispositivo avremo in un contesto semplice una prova evidente del ruolo termodinamico dell'informazione, e vedremo che il sistema soddisfa in ogni circostanza il secondo principio della termodinamica. Questi risultati vanno ad avvalorare l'interpretazione della memoria come risorsa termodinamica, che, sebbene non trovi sostegno unanime nella comunità scientifica, può essere considerata la risoluzione del paradosso di Maxwell.

Nel primo capitolo introdurremo le varie parti del modello e l'attività del dispositivo: inizialmente descriveremo i componenti del sistema e proporremo un esempio semplice dell'interazione fra di essi; in seguito analizzeremo il comportamento del dispositivo quando si trova nelle condizioni di compiere lavoro, soffermandoci anche sulla risoluzione analitica della dinamica. Nello specifico presenteremo due versioni del diavoleto, la prima dotata di tre configurazioni e la seconda solo di due, e confronteremo i relativi risultati. Nel secondo capitolo sarà approfondita l'analisi sul significato del funzionamento del dispositivo e sulle implicazioni termodinamiche dell'elaborazione di dati e apparirà evidente il legame intimo fra termodinamica e teoria dell'informazione.

Capitolo 2

Il diavoletto e la sua dinamica

2.1 Descrizione del modello

Il modello di diavoletto di Maxwell che analizzeremo è un dispositivo meccanico autonomo capace di utilizzare le fluttuazioni di una sorgente di calore in equilibrio per sollevare un carico, producendo così lavoro utile, se contemporaneamente registra informazione su una memoria fisica.

Il dispositivo in questione, che nella discussione chiameremo diavoletto, si trova in contatto con un termostato e con una stringa di bit ed è collegato ad una massa che può essere sollevata o abbassata. Le fluttuazioni del termostato innescano transizioni casuali fra i tre stati che il diavoletto possiede, indicati con A , B e C : possiamo vedere la sequenza delle transizioni come una rotazione, che considereremo in senso orario se il sistema evolve nella direzione $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ o in senso antiorario se la successione degli stati è invertita. Diremo che il diavoletto compie una rotazione direzionata se le transizioni in senso orario sono più frequenti di quelle in senso antiorario o viceversa; per avere una misura della rotazione direzionata introduciamo un contatore χ che aumenta di una unità ad ogni transizione $C \rightarrow A$ e diminuisce di una unità quando si verifica la transizione inversa.

La stringa di bit scorre vicino al diavoletto in modo che questo interagisca con un solo bit alla volta per un certo intervallo di tempo. Ogni bit ha due possibili configurazioni, definite 0 e 1, e può passare da una all'altra soltanto interagendo col diavoletto. L'evoluzione del diavoletto è strettamente connessa alla trasformazione della stringa di bit: infatti ad ogni transizione dallo stato C allo stato A corrisponde un cambiamento dello stato del bit da 0 a 1, e viceversa ogni transizione da A a C è accompagnata da una modifica del contenuto del bit da 1 a 0; le transizioni fra A e B e fra B e C , invece, non influiscono sullo stato del bit. Se in ogni intervallo di interazione trattiamo la coppia formata da diavoletto e bit come un sistema composto dotato di sei stati ($A0$, $B0$, $C0$, $A1$, $B1$, $C1$), allora le possibili transizioni sono rappresentate da una catena che può essere percorsa in entrambi i sensi. La dinamica di questo sistema consiste in una successione di spostamenti lungo la catena che seguono la statistica di Poisson: ad ognuna delle dieci transizioni permesse $j \rightarrow i$, con $i \neq j$, è associato un peso R_{ij} che equivale alla probabilità per unità di tempo che il sistema passi dallo stato j allo stato i .

Per ora non introduciamo la massa e focalizziamo l'attenzione sugli effetti dell'interazione fra il diavoletto, che comunica con il termostato, e il bit. In tali condizioni tutti e sei gli stati del sistema composto si trovano alla stessa energia per cui tutte le transizioni sono ugualmente probabili: definiamo $R_{ij} = 1$ per ogni $i \neq j$, stabilendo così l'unità di tempo

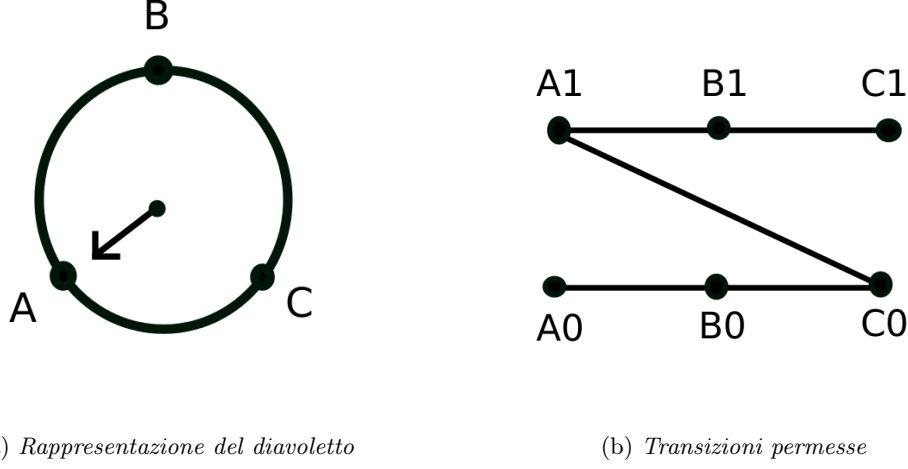


Figura 2.1: Schema del dispositivo e delle transizioni possibili per il sistema composto

del modello. In sostanza ognuno dei sei stati ha la medesima probabilità di essere lo stato di equilibrio verso il quale il sistema composto evolve. Il tempo impiegato da diavoleto e bit per raggiungere l'equilibrio è dell'ordine dell'unità, per cui la scelta dell'intervallo di interazione τ , uno dei tre parametri caratteristici del sistema, deve tenere conto del fatto che con $\tau \ll 1$ il sistema difficilmente riuscirà a evolversi, mentre con $\tau \gg 1$ potrà in effetti arrivare all'equilibrio.

I bit in ingresso sono statisticamente indipendenti uno dall'altro e sono caratterizzati dalla probabilità p_0 di trovarsi nello stato 0 e dalla probabilità p_1 di trovarsi nello stato 1. Introduciamo allora il secondo parametro caratteristico del sistema, il parametro di eccesso δ , che descrive l'omogeneità della distribuzione degli stati nella stringa di bit prima dell'interazione col diavoleto:

$$\delta = p_0 - p_1. \quad (2.1)$$

Vediamo come δ influisce sul moto del diavoleto, per esempio considerando il caso $\delta = 1$ in cui tutti i bit in ingresso sono nello stato 0. All'inizio di ogni intervallo di interazione il sistema composto si trova in uno degli stati $A0$, $B0$ o $C0$ e per tutta la durata dell'intervallo il sistema si muove lungo la catena di transizioni, passando più volte tra $C0$ e $A1$. Se all'istante finale il sistema è ancora in uno degli stati $A0$, $B0$ o $C0$ significa che ogni transizione da $C0$ ad $A1$ è stata compensata da una transizione nel verso opposto, perciò il valore del contatore χ non varia; se invece lo stato finale del sistema è $A1$, $B1$ o $C1$ allora è avvenuta una rotazione netta in senso orario e di conseguenza il contatore varia di $\Delta\chi = +1$. È utile notare che quando $\delta = 1$ il diavoleto non può effettuare rotazione netta in senso antiorario: questo porta a intuire che la distribuzione degli stati 0 e 1 nella stringa in ingresso sia in grado di costringere il diavoleto a ruotare in una direzione o nell'altra. Inoltre in simili condizioni la stringa in uscita costituisce un ritratto fedele del moto del diavoleto, in quanto ogni 1 rappresenta una rotazione in senso orario.

In generale per un valore di δ qualsiasi la variazione del contatore nell' n -esimo intervallo di interazione è data da $\Delta\chi = b'_n - b_n$, dove b_n è lo stato dell' n -esimo bit prima di interagire col diavoleto e b'_n è lo stato dopo l'interazione, e la stringa in uscita contiene informazioni solo parziali riguardo all'evoluzione del diavoleto. Il valore di aspettazione di $\Delta\chi$ corrisponde al numero medio di rotazioni nette in senso orario per intervallo di

interazione: definiamo flusso questa quantità e la scriviamo come

$$\Phi = \langle \Delta\chi \rangle = p'_1 - p_1 = \frac{\delta - \delta'}{2}, \quad (2.2)$$

con $\delta' = p'_0 - p'_1$; Φ fornisce una misura della rotazione direzionata del diavoleto e permette di valutare la dinamica del sistema.

Ad un certo punto il diavoleto raggiunge uno stato stazionario periodico in cui il suo comportamento statistico è lo stesso da un intervallo all'altro: per questo stato stazionario possiamo risolvere analiticamente il sistema, utilizzando un procedimento che illustreremo in seguito, e trovare un'espressione esplicita per Φ :

$$\Phi(\delta, \tau) = \frac{\delta}{2} \left[1 - \frac{1}{3} K(\tau) \right] \quad (2.3)$$

dove

$$K(\tau) = e^{-2\tau} \cdot \frac{(1 + 8\alpha + 4\sqrt{3}\beta) - (2 + 7\alpha + 4\sqrt{3}\beta)e^{-2\tau}}{3 - (2 + \alpha)e^{-2\tau}} \quad (2.4)$$

e $\alpha = \cosh(\sqrt{3}\tau)$, $\beta = \sinh(\sqrt{3}\tau)$. La funzione $K(\tau)$ decresce in modo monotono da $K(0) = 3$, che implica $\Phi = 0$, a $K(\infty) = 0$, che implica $\Phi = \frac{\delta}{2}$: questo andamento riflette il fatto che se l'intervallo di interazione è molto piccolo, al limite nullo, il sistema non ha il tempo di evolvere e il diavoleto non compie alcuna rotazione; al contrario se l'intervallo di interazione è sufficientemente lungo il sistema riesce a raggiungere l'equilibrio, in cui, come abbiamo detto, le configurazioni con bit nello stato 0 e quelle con bit nello stato 1 sono ugualmente probabili, cioè $p'_0 = p'_1$, e di conseguenza $\delta' = 0$ e $\Phi = \frac{\delta}{2}$.

È importante notare che la quantità fra parentesi nella formula 2.3 è non negativa e di conseguenza il segno di Φ è il segno di δ : una δ positiva, che rappresenta un eccesso di bit nello stato 0 nella stringa in ingresso, produce una Φ positiva, cioè una rotazione direzionata in senso orario, e viceversa un eccesso di bit nello stato 1 provoca una rotazione direzionata in senso antiorario. Come sospettavamo la distribuzione degli stati dei bit in arrivo influenza profondamente l'attività del diavoleto e nel prossimo paragrafo vedremo come questo legame può essere utilizzato.

2.2 La possibilità di compiere lavoro

Attacciamo al diavoleto una massa m in modo che il suo movimento sia guidato dall'evoluzione del sistema: ogni volta che il diavoleto passa dallo stato C allo stato A la massa viene sollevata di una quantità Δh , mentre una transizione da A a C provoca un abbassamento della stessa entità. Se riusciamo a fare in modo che il diavoleto esegua ripetute transizioni da C ad A , che costituiscono una rotazione direzionata in senso orario, allora il carico viene sollevato e il sistema compie lavoro utile. D'altra parte la presenza stessa del carico ostacola la rotazione in senso orario: infatti la forza di gravità tira la massa verso il basso, forzando il diavoleto a ruotare in senso antiorario. In simili condizioni il sistema si trova fuori equilibrio.

L'energia necessaria al movimento della massa viene scambiata con il termostato: le fluttuazioni della riserva di calore consentono al diavoleto di assorbire un'energia pari a $mg\Delta h$ al passaggio da C ad A e di cedere la stessa energia in corrispondenza della transizione inversa. Il diavoleto e il termostato si trovano in equilibrio tra loro alla temperatura

T e questo ci permette di descrivere le transizioni fra gli stati A e C secondo l'equazione propria del *detailed balance*:

$$R_{A1,C0} = R_{C0,A1}e^{-f}, \quad \text{con } f = \frac{\Delta E}{k_B T} = \frac{mg\Delta h}{k_B T}, \quad (2.5)$$

mentre le altre R_{ij} non vengono modificate. Considerando il sistema composto diavoletto-bit è evidente che ora c'è un dislivello energetico fra gli stati con bit 0 e gli stati con bit 1, dovuto al fatto che nel passaggio tra $C0$ e $A1$ il diavoletto scambia calore col termostato. Poichè $f > 0$ risulta $R_{C0,A1} > R_{A1,C0}$: in sostanza, come abbiamo già detto, la gravità che agisce sulla massa influenza la dinamica del diavoletto e la sua azione è rappresentata dal parametro f , che in questo contesto assume il ruolo di una forza termodinamica capace di indurre il diavoletto a ruotare in senso antiorario. Il problema che si pone di conseguenza è individuare un'altra forza che sia in grado di contrastare f , spingendo il diavoletto a compiere una rotazione in senso orario maggiore e produrre così lavoro utile.

Durante l'interazione fra diavoletto e bit il sistema evolve secondo il nuovo set di probabilità di transizione per unità di tempo. Se il tempo di interazione τ è sufficientemente lungo, il sistema raggiungerà l'equilibrio, ma ora è più probabile che l'equilibrio corrisponda ad uno stato con bit 0 piuttosto che con bit 1:

$$p_{A0}^{eq} = p_{B0}^{eq} = p_{C0}^{eq} = \frac{e^f}{Z}, \quad p_{A1}^{eq} = p_{B1}^{eq} = p_{C1}^{eq} = \frac{1}{Z} \quad (2.6)$$

con $Z = 3(1 + e^f)$ costante di normalizzazione; sommando sugli stati del diavoletto si trovano le probabilità di equilibrio degli stati del bit, che soddisfano la relazione:

$$p_0^{eq} - p_1^{eq} = \frac{e^f}{1 + e^f} - \frac{1}{1 + e^f} = \tanh\left(\frac{f}{2}\right) \equiv \epsilon, \quad (2.7)$$

dove abbiamo definito il terzo parametro caratteristico del sistema, il parametro di carico ϵ , che costituisce una versione riscalata della forza termodinamica f . L'equazione 2.5 permette di scegliere

$$R_{A1,C0} = 1 - \epsilon \quad \text{e} \quad R_{C0,A1} = 1 + \epsilon. \quad (2.8)$$

Ciò che vogliamo scoprire è se in questa situazione si produrrà una rotazione direzionata e a quali condizioni: in pratica vogliamo determinare e studiare l'espressione del flusso Φ e questo è possibile risolvendo analiticamente il sistema per lo stato stazionario del diavoletto. Di seguito analizziamo in dettaglio il procedimento che conduce al risultato.

Per prima cosa bisogna trovare lo stato stazionario del diavoletto, che indicheremo con q^{ss} . In generale prima dell'interazione con il bit la distribuzione di probabilità degli stati del diavoletto è descritta dal vettore $q = (q_A, q_B, q_C)^T$; alla fine dell'intervallo di interazione il diavoletto sarà caratterizzato da una nuova distribuzione data da $q' = (q'_A, q'_B, q'_C)^T = Tq$, dove T è la matrice di transizione che descrive l'evoluzione della probabilità degli stati del diavoletto in un intervallo di interazione. Si può dimostrare che lo stato stazionario corrisponde all'unico vettore che soddisfa la condizione $Tq = q$ e lo ricaveremo proprio risolvendo questa equazione. La matrice di transizione è

$$T_{3 \times 3} = P_D e^{R\tau} M, \quad (2.9)$$

con

$$M_{6 \times 3} = \begin{pmatrix} p_0 \cdot \mathbb{I}_{3 \times 3} \\ p_1 \cdot \mathbb{I}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad P_{D_{3 \times 6}} = (\mathbb{I}_{3 \times 3}, \mathbb{I}_{3 \times 3}), \quad (2.10)$$

dove \mathbb{I} indica la matrice identità. M è la matrice per cui si deve moltiplicare q per ottenere il vettore che rappresenta le probabilità dei sei stati del sistema composto diavoleto-bit prima dell'interazione: infatti all'istante iniziale il diavoleto e il bit sono scorrelati, quindi la probabilità di ognuno degli stati combinati è semplicemente uguale al prodotto delle probabilità degli stati del diavoleto e del bit corrispondenti. Il fattore $e^{R\tau}$, in cui compare la matrice R delle probabilità di transizione per unità di tempo relative al sistema composto diavoleto-bit, agisce sul vettore restituendone l'evoluzione temporale nell'intervallo τ e la matrice P_D proietta il sistema composto nella distribuzione di stati relativa al diavoleto.

Per ottenere T bisogna scrivere esplicitamente $e^{R\tau}$; la matrice R , per quanto detto sopra, risulta essere:

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2+\epsilon & 1+\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\epsilon & -2-\epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad (2.11)$$

per poterne calcolare l'esponenziale è necessario prima diagonalizzarla e dal momento che non è simmetrica dovremo trovarne una opportuna decomposizione spettrale. È interessante notare che la non simmetria di R riflette la situazione di non equilibrio in cui si trova il sistema. I sei autovalori di R sono reali, non degeneri, indipendenti da ϵ e non positivi:

$$\{\lambda_i\} = \{0, -2 + \sqrt{3}, -1, -2, -3, -2 - \sqrt{3}\}. \quad (2.12)$$

Utilizzando le due equazioni agli autovalori

$$R|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle \quad \text{e} \quad \langle u_i^L|R = \langle u_i^L|\lambda_i \quad (2.13)$$

otteniamo gli autovettori destri e sinistri; scriviamo gli autovettori destri come colonne di una matrice U e gli autovettori sinistri come righe di una matrice V :

$$U = \begin{bmatrix} x & 1 & x & 1 & x & 1 \\ x & -a & 0 & -1 & -2x & -b \\ x & c & -x & -1 & x & d \\ y & -c & -y & 1 & y & -d \\ y & a & 0 & 1 & -2y & b \\ y & -1 & y & -1 & y & -1 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ y & -ay & cy & -cx & ax & -x \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ y & -y & -y & x & x & -x \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ y & -by & dy & -dx & bx & -x \end{bmatrix}$$

$$N = VU = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12d \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

avendo definito le quantità

$$\begin{aligned} x &= 1 + \epsilon, & a &= 1 - \sqrt{3}, & c &= 2 - \sqrt{3} \\ y &= 1 - \epsilon, & b &= 1 + \sqrt{3}, & d &= 2 + \sqrt{3} \end{aligned} \quad (2.15)$$

La matrice N risulta diagonale dal momento che le basi di autovettori destri e sinistri formano un sistema biortogonale: $\langle u_i^L | u_j \rangle = n_i \delta_{ij}$. Per la matrice U vale la relazione $RU = U\Lambda$, che possiamo riscrivere come $R = U\Lambda U^{-1}$, con Λ matrice degli autovalori di R . Poichè $N = VU$ si trova $U^{-1} = N^{-1}V$ e sostituendo nell'espressione di R otteniamo $R = U\Lambda N^{-1}V$. Le matrici Λ e N sono entrambe diagonali quindi commutano fra loro e la decomposizione spettrale di R risulta essere:

$$R = UN^{-1}\Lambda V. \quad (2.16)$$

Calcoliamo l'esponenziale di matrice tramite la sua serie:

$$e^{R\tau} = e^{UN^{-1}(\Lambda\tau)V} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(UN^{-1}(\Lambda\tau)V)^n}{n!}, \quad (2.17)$$

ma

$$(UN^{-1}(\Lambda\tau)V)^n = UN^{-1}(\Lambda\tau)V \cdot UN^{-1}(\Lambda\tau)V \cdots UN^{-1}(\Lambda\tau)V = UN^{-1}(\Lambda\tau)^n V$$

dato che $VUN^{-1} = \mathbb{I}$; si ottiene allora

$$e^{R\tau} = UN^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Lambda\tau)^n}{n!} V = UN^{-1} e^{\Lambda\tau} V, \quad (2.18)$$

$$\text{con } e^{\Lambda\tau} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1\tau} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_6\tau} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N^{-1} = \begin{bmatrix} n_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & n_6^{-1} \end{bmatrix}.$$

Possiamo finalmente scrivere la matrice di transizione $T = P_D UN^{-1} e^{\Lambda\tau} V M$:

$$T = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} F + G + \delta H & M - 2\delta L & F - G + \delta H \\ M & M + 12\sigma^3 & M \\ F - G - \delta H & M + 2\delta L & F + G - \delta H \end{bmatrix} - \frac{\epsilon}{12} \begin{bmatrix} H + \delta(G - 6\sigma) & -2L & H - \delta(G - 6\sigma) \\ 0 & 0 & 0 \\ -H - \delta(G - 6\sigma) & 2L & -H + \delta(G - 6\sigma) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

dove

$$\begin{aligned} \sigma &= e^{-\tau}, \quad F = 4 + 2\sigma^3, \quad G = 4\sigma^2 + \sigma^c + \sigma^d, \\ H &= \sqrt{3}(\sigma^c - \sigma^d), \quad L = 2\sigma^2 - \sigma^c - \sigma^d, \quad M = 4 - 4\sigma^3. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ora siamo nelle condizioni di trovare lo stato stazionario del diavoletto: per risolvere il sistema $Tq^{pss} = q^{pss}$ è necessaria una quarta equazione, che ricaviamo dalla legge della probabilità totale $q_A^{pss} + q_B^{pss} + q_C^{pss} = 1$. Svolgendo i calcoli otteniamo:

$$q^{pss} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + N \\ 1 \\ 1 - N \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

$$\text{con } N(\delta, \epsilon) = \frac{(\delta - \epsilon)(H - L)}{6 - G + \epsilon\delta(G - 6\sigma)}.$$

Infine applichiamo allo stato q^{ps} una matrice che restituisca la distribuzione di probabilità degli stati del bit dopo l'interazione col diavoleto:

$$\begin{pmatrix} p_0' \\ p_1' \end{pmatrix} = P_B e^{R\tau} M q^{ps}, \quad (2.22)$$

con $P_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ che proietta il sistema composto nello stato del bit. Il nostro obiettivo è trovare un'espressione per il flusso Φ , perciò avendo a disposizione p_1' usiamo la relazione $\Phi = p_1' - p_1$ e otteniamo:

$$\Phi(\delta, \epsilon, \tau) = \frac{\delta - \epsilon}{2} \left[1 - \frac{1}{3} K(\tau) + \frac{\epsilon\delta}{6} J(\tau, \epsilon\delta) \right] \quad (2.23)$$

con

$$J(\tau, \epsilon\delta) = \frac{(1 - e^{-\tau})[2e^{-2\tau}(\alpha + \sqrt{3}\beta - 1)]^2}{[3(1 - \epsilon\delta e^{-\tau}) - (1 - \epsilon\delta)(2 + \alpha)e^{-2\tau}][3 - (2 + \alpha)e^{-2\tau}]} \quad (2.24)$$

e $\alpha, \beta, K(\tau)$ definite come sopra (eq. 2.4).

Come è prevedibile quando $\tau \rightarrow 0$ il flusso si annulla perchè il sistema non ha modo di evolversi; quando invece diavoleto e bit hanno tempo sufficiente per raggiungere l'equilibrio le probabilità finali degli stati del bit sono quelle che compaiono nella definizione 2.7 e quindi $\delta' = \epsilon$: dalle espressioni 2.23 e 2.24 si vede infatti che per $\tau \rightarrow \infty$ risulta $\Phi \rightarrow \frac{\delta - \epsilon}{2}$.

Tramite metodi numerici è stato verificato che la quantità fra parentesi quadre nell'equazione 2.3 è non negativa, perciò il segno di Φ , che indica la direzione della rotazione del diavoleto, è determinato dalla differenza $\delta - \epsilon$: proprio nella competizione fra i parametri δ ed ϵ sta il cuore della questione. La condizione $\delta > \epsilon$, necessaria per ottenere un flusso positivo, sottintende che $p_0 > p_0^{eq}$, cioè che la stringa di bit in ingresso contenga un eccesso di 0 rispetto alle proporzioni stabilite dalle probabilità di equilibrio; di conseguenza, durante l'evoluzione che porta il sistema all'equilibrio, il numero di transizioni che modificano lo stato del bit da 0 a 1 è maggiore del numero delle transizioni inverse, in modo tale che la stringa in uscita presenti le proporzioni aspettate di 0 e 1. In altre parole questo significa che una sovrabbondanza di bit nello stato 0 nella stringa in ingresso è in grado di indurre il diavoleto a compiere una rotazione direzionata in senso orario e quindi a sollevare il carico. Il risultato cui siamo giunti rivela in definitiva che la distribuzione statistica dei bit in ingresso, riassunta nel parametro δ , si comporta effettivamente come una forza che si oppone all'azione di ϵ e permette al diavoleto di compiere lavoro. Esamineremo a fondo questa interpretazione nel prossimo capitolo.

Si ritrova la stessa dinamica anche se consideriamo $f < 0$, cioè se colleghiamo la massa al diavoleto in modo tale che siano le rotazioni in senso antiorario a sollevarla. Il parametro ϵ ha il segno di f , perciò l'equazione 2.23 è valida per $|\epsilon| < 1$ e $|\delta| \leq 1$; le condizioni sul segno del flusso sono le stesse sia per $\epsilon > 0$ che per $\epsilon < 0$:

$$\begin{cases} \Phi > 0 & \text{se } \delta > \epsilon \\ \Phi = 0 & \text{se } \delta = \epsilon \\ \Phi < 0 & \text{se } \delta < \epsilon \end{cases} \quad (2.25)$$

2.3 Una variazione: diavoletto con due stati

Potremmo a questo punto chiederci se il diavoletto per fornire lavoro utile debba necessariamente muoversi fra tre stati, o se ne sarebbero sufficienti soltanto due. Consideriamo allora il caso in cui il diavoletto abbia solo due stati, A e C , e per il resto il sistema sia analogo a quello già descritto. Il sistema composto formato da diavoletto e bit possiede allora quattro stati, $A0$, $C0$, $A1$ e $C1$, e le possibili transizioni sono:

$$A0 \rightleftharpoons C0 \rightleftharpoons A1 \rightleftharpoons C1 \quad (2.26)$$

L'eliminazione dello stato B non influisce sulle probabilità di transizione fra gli altri stati: il sistema si muove sempre fra due livelli energetici la cui separazione, dovuta agli scambi di calore fra diavoletto e termostato associati al movimento del carico, è pari a $mg\Delta h$, per cui sono ancora valide le relazioni

$$\frac{R_{A1,C0}}{R_{C0,A1}} = e^{-f}, \quad p_0^{eq} - p_1^{eq} = \epsilon, \quad R_{A1,C0} = 1 - \epsilon, \quad R_{C0,A1} = 1 + \epsilon. \quad (2.27)$$

con f definita come sopra (eq. 2.5). Seguendo il procedimento già illustrato, cerchiamo di ottenere un'espressione della circolazione Φ che permetta di valutare il comportamento del diavoletto in queste condizioni. Prima di tutto bisogna individuare il vettore $q^{pss} = (q_A^{pss}, q_C^{pss})^T$ che descrive la distribuzione di probabilità delle due configurazioni del diavoletto nello stato stazionario, per il quale è possibile risolvere analiticamente il sistema. Questo vettore soddisfa l'equazione $Tq^{pss} = q^{pss}$, con T matrice di transizione:

$$T = P_D e^{R\tau} M \quad (2.28)$$

dove $(P_D)_{2 \times 4} = (\mathbb{I}_{2 \times 2}, \mathbb{I}_{2 \times 2})$ e $M_{4 \times 2} = \begin{pmatrix} p_0 \cdot \mathbb{I}_{2 \times 2} \\ p_1 \cdot \mathbb{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix}$ hanno la funzione descritta in precedenza.

La matrice R delle probabilità di transizione per unità di tempo per il sistema composto diavoletto-bit è:

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 + \epsilon & 1 + \epsilon & 0 \\ 0 & 1 - \epsilon & -2 - \epsilon & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

con i termini sulla diagonale dati dall'opposto della somma degli altri termini nella colonna. Per poter calcolare $e^{R\tau}$ bisogna trovare una opportuna decomposizione spettrale di R ; ne cerchiamo perciò gli autovalori, che risultano essere

$$\{\lambda_i\} = \{0, -2, -2 + \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}\}, \quad (2.30)$$

e i relativi autovettori destri e sinistri. Otteniamo tre matrici: U ha come colonne gli autovettori destri di R , V ha come righe gli autovettori sinistri di R e $N = VU$:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -a & -b \\ y/x & -y/x & a & b \\ y/x & y/x & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -a & ax/y & -x/y \\ 1 & -b & bx/y & -x/y \end{bmatrix},$$

$$N = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1/x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c/y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d/y \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

avendo definito le quantità

$$\begin{aligned} x &= 1 + \epsilon, & y &= 1 - \epsilon, \\ a &= 1 - \sqrt{2}, & b &= 1 + \sqrt{2}, \\ c &= 2 - \sqrt{2}, & d &= 2 + \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Possiamo quindi scrivere la decomposizione spettrale di R :

$$R = UN^{-1}\Lambda V \quad (2.33)$$

con Λ matrice degli autovalori.

La matrice di transizione diventa $T = P_D U N^{-1} e^{\Lambda\tau} V M$ e calcolando i prodotti fra le matrici otteniamo:

$$T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 + F + G + H & 2 - F - G + H \\ 2 - F - G - H & 2 + F + G - H \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

dove abbiamo introdotto le quantità

$$\begin{aligned} F &= 2e^{-2\tau}\epsilon\delta, & G &= e^{-2\tau}(1 - \epsilon\delta)(2\alpha - \sqrt{2}\beta) \\ H &= e^{-2\tau}\sqrt{2}\beta(\delta - \epsilon), & \alpha &= \cosh(\sqrt{2}\tau), & \beta &= \sinh(\sqrt{2}\tau). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Per risolvere l'equazione $Tq^{pss} = q^{pss}$ è necessaria una terza condizione, che ricaviamo dalla legge della probabilità totale $q_A^{pss} + q_C^{pss} = 1$. Dopo alcuni passaggi algebrici otteniamo:

$$q^{pss} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + Q \\ 1 - Q \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

con $Q = \frac{H}{2-F-G}$.

Ora utilizzando q^{pss} possiamo trovare la distribuzione di probabilità degli stati del bit dopo l'interazione col diavoleto:

$$\begin{pmatrix} p'_0 \\ p'_1 \end{pmatrix} = P_B e^{R\tau} M q^{pss} \quad (2.37)$$

con

$$P_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

matrice che proietta il sistema composto diavoleto-bit nello stato del bit. Si ottiene:

$$\begin{pmatrix} p'_0 \\ p'_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2x + M + N & 2x - M + N \\ 2y - M - N & 2y + M - N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + Q \\ 1 - Q \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2x + N + MQ \\ 2y - N - MQ \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

La quantità a cui siamo interessati è il flusso $\Phi = p'_1 - p_1$, che da quanto appena trovato risulta essere:

$$\Phi(\delta, \epsilon, \tau) = \frac{(\delta - \epsilon)}{2} \left[1 - \frac{e^{-2\tau} \cdot (2\alpha + \sqrt{2}\beta)(1 - e^{-2\tau}\epsilon\delta) - 2e^{-2\tau}(1 - \epsilon\delta)}{2(1 - e^{-2\tau}\epsilon\delta) - e^{-2\tau}(2\alpha - \sqrt{2}\beta)(1 - \epsilon\delta)} \right]. \quad (2.40)$$

Studiando l'andamento di Φ al variare dell'intervallo di interazione τ scopriamo lo stesso comportamento già visto nel caso del diavoletto con tre stati: nel limite $\tau \rightarrow 0$ il secondo termine all'interno delle parentesi quadre in eq. 2.40 tende a 1, perciò $\Phi \rightarrow 0$; nel limite $\tau \rightarrow \infty$, invece, lo stesso termine tende a 0 e di conseguenza $\Phi \rightarrow \frac{\delta - \epsilon}{2}$. Consideriamo poi la quantità fra parentesi quadre, che, fissato τ , possiamo trattare come una funzione delle variabili δ ed ϵ , con $|\delta| \leq 1$ e $|\epsilon| < 1$:

$$\zeta(\delta, \epsilon) = 1 - \frac{e^{-2\tau} \cdot (2\alpha + \sqrt{2}\beta)(1 - e^{-2\tau}\epsilon\delta) - 2e^{-2\tau}(1 - \epsilon\delta)}{2(1 - e^{-2\tau}\epsilon\delta) - e^{-2\tau}(2\alpha - \sqrt{2}\beta)(1 - \epsilon\delta)} \quad (2.41)$$

Nei grafici riportati di seguito si osserva che la funzione ζ è sempre positiva, quindi non influisce sul segno di Φ : la dinamica del diavoletto con due stati riproduce lo stesso tipo di competizione fra i parametri δ ed ϵ che si trova nel caso del diavoletto con tre stati.

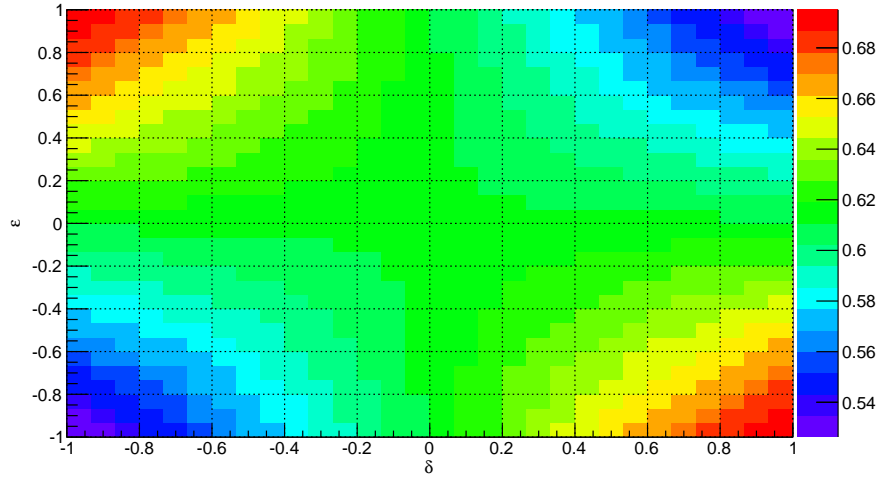


Figura 2.2: Il colore indica il valore della funzione ζ per $\tau = 1$

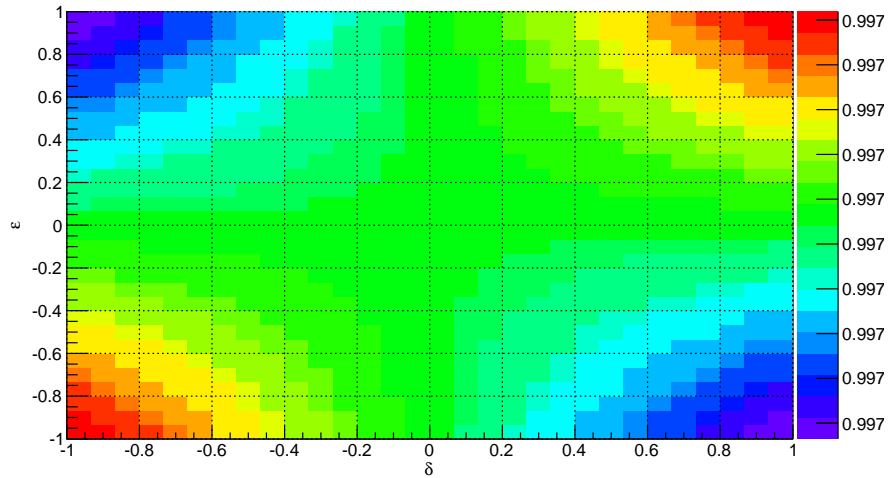


Figura 2.3: Il colore indica il valore della funzione ζ per $\tau = 10$

Capitolo 3

L'elaborazione dell'informazione

3.1 Le diverse funzioni del diavoletto

Riassumendo, l'equazione 2.23 mostra che si verifica una rotazione direzionata in senso orario per $\delta > \epsilon$ e una rotazione direzionata in senso antiorario per $\delta < \epsilon$, mentre non c'è rotazione netta quando $\delta = \epsilon$, poichè i bit arrivano già distribuiti secondo le probabilità di equilibrio e le transizioni nei due versi opposti si compensano in modo da non modificare la statistica della stringa.

È possibile visualizzare la situazione in un grafico:

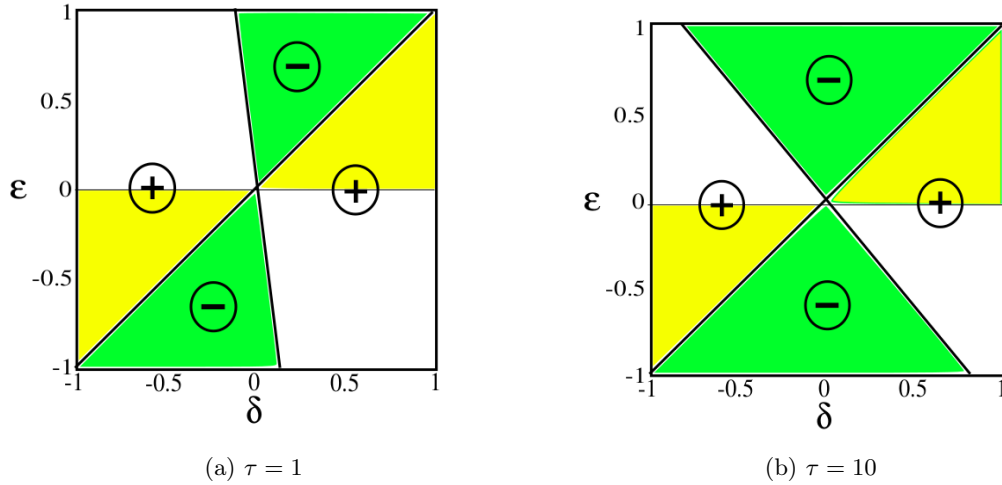


Figura 3.1: Schema delle funzioni del diavoletto

Sulla diagonale $\delta = \epsilon$ si ha $\Phi = 0$, nel triangolo a sinistra di questa linea $\Phi < 0$ e nel triangolo a destra $\Phi > 0$.

Analizziamo più profondamente il comportamento del diavoletto introducendo due grandezze che mettono in luce l'aspetto termodinamico del sistema. La prima grandezza è il lavoro: abbiamo detto che Φ è il numero medio di rotazioni complete in senso orario per intervallo di interazione, quindi la quantità $W = k_B T f \Phi$ corrisponde al lavoro medio eseguito dal diavoletto sulla massa per intervallo di interazione. Il lavoro risulta positivo quando $f \Phi > 0$, cioè quando il parametro di carico ϵ e il flusso sono concordi: in questa situazione, rappresentata nelle figure 3.1a e 3.1b dai triangoli gialli dove $0 < \epsilon < \delta$ e $\delta < \epsilon < 0$, il diavoletto funziona come un motore, e converte il calore prelevato dal

termostato in lavoro per sollevare la massa. Un lavoro negativo, invece, può derivare da due diversi comportamenti del diavoleto e per distinguerli bisogna valutare una seconda grandezza, legata alla distribuzione statistica dei bit.

La stringa di bit che scorre accanto al diavoleto costituisce una memoria fisica sulla quale il sistema lascia una traccia dei suoi movimenti. Definiamo le quantità

$$S_b = - \sum_{i=0,1} p_i \ln p_i \quad \text{e} \quad S'_b = - \sum_{i=0,1} p'_i \ln p'_i \quad (3.1)$$

che chiameremo disordine per bit; esse indicano il contenuto di informazione della stringa di bit prima (S_b) e dopo (S'_b) l'interazione col diavoleto. In particolare, S_b fornisce una misura della capacità dei bit in ingresso di registrare nuova informazione. Il valore minimo di S_b è 0 e corrisponde al caso in cui i bit si trovino tutti nello stato 0 ($p_0 = 1$, $p_1 = 0$, $\delta = 1$) oppure tutti nello stato 1 ($p_0 = 0$, $p_1 = 1$, $\delta = -1$): in simili condizioni ogni bit che esce dall'interazione con uno stato diverso da quello iniziale segnala una rotazione netta, per cui la stringa in uscita contiene il fedele ritratto dell'attività del diavoleto e tutta l'informazione viene raccolta. Il valore massimo di S_b è $\ln 2$: i bit arrivano in uguale numero nello stato 0 e nello stato 1 ($p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$, $\delta = 0$) e dalla distribuzione dei bit in uscita non è possibile tracciare i movimenti del diavoleto. Al variare di S_b tra i suoi estremi cambia la quantità di informazione che i bit riescono ad immagazzinare, quindi la capacità della stringa di acquisire dati appare legata al grado di mescolamento iniziale degli stati dei bit. Una stringa che presenta una sovrabbondanza di uno dei due stati si trova in una configurazione che possiamo considerare ordinata e funziona come una memoria parzialmente vuota (o completamente vuota nel caso limite in cui uno degli stati non compaia) pronta a ricevere nuova informazione: il diavoleto, durante l'interazione, converte l'eccesso di bit in un certo stato in rotazione direzionata, per cui all'uscita la stringa mostra un maggiore mescolamento dei due stati 0 e 1, in altre parole è più disordinata. Al contrario una stringa in cui la distribuzione degli stati è casuale mostra già un alto livello di disordine e costituisce una memoria piena, o quasi piena, non disponibile per registrare informazione.

Definiamo allora la grandezza

$$\Delta S \equiv S'_b - S_b \quad (3.2)$$

che fornisce una misura della quantità di nuova informazione che viene scritta nei bit quando interagiscono col diavoleto. In riferimento alle figure 3.1a e 3.1b possiamo dire che ΔS è nulla lungo la diagonale $\delta = \epsilon$ e anche sull'altra linea obliqua che taglia il grafico e che rappresenta l'inversione delle proporzioni ($p'_0 = p_1$ e $p'_1 = p_0$): in entrambi i casi il grado di disordine della stringa non cambia. Le due linee incrociandosi individuano quattro regioni, che abbiamo contrassegnato coi simboli $+$ e $-$ per indicare dove ΔS è positiva e dove è negativa. Vediamo immediatamente che $\Delta S > 0$ nelle situazioni in cui il diavoleto funziona come un motore: ciò è consistente col principio secondo cui il diavoleto è in grado di compiere lavoro positivo quando ha la possibilità di scrivere informazione sui bit, aumentando di conseguenza il disordine della stringa. Questo significa che una memoria parzialmente o interamente vuota assume il ruolo di una risorsa termodinamica, che viene consumata in modo da permettere al diavoleto di utilizzare il calore scambiato con il termostato per sollevare il carico.

Come abbiamo già detto, fuori dai triangoli colorati in giallo il lavoro è negativo e si possono realizzare due dinamiche diverse a seconda del segno di ΔS . Nelle zone verdi di figura 3.1a e 3.1b si ha $W < 0$ e $\Delta S < 0$ e il diavoleto funziona come un cancellino che utilizza l'energia della massa che scende per cancellare informazione dai bit, lasciando la stringa in una configurazione più ordinata di quella di partenza. Per esempio, ipotizzando

$\epsilon \approx 1$ e $\delta = 0$, è chiaro che, se τ è tale da consentire al sistema di raggiungere l'equilibrio, alla fine dell'intervallo di interazione il sistema si troverà molto probabilmente in uno stato con bit 0, per cui mano a mano che i bit scorrono il diavoleto converte gli stati 1 in stati 0 e la stringa, che inizialmente era composta in eguale misura di 0 e 1, uscirà dall'interazione con l'aspetto di una memoria vuota. Proprio come nella situazione precedente, il sistema utilizza una risorsa, che ora è l'energia potenziale del carico che si abbassa, per costruirne un'altra, in questo caso la memoria resettata e disponibile per registrare nuova informazione. L'ultima situazione da esaminare è quella in cui $W < 0$ e $\Delta S > 0$, indicata nelle figure 3.1a e 3.1b dalle zone bianche: in queste circostanze la massa cade e il disordine della stringa aumenta quindi il diavoleto appare inutile perchè entrambe le risorse vengono sprecate senza alcun risultato.

In questa analisi trova conferma l'idea che la competizione fra δ ed ϵ rappresenti a tutti gli effetti una interazione fra due forze, ognuna delle quali corrisponde alla disponibilità di una risorsa termodinamica.

3.2 La relazione fra lavoro ed entropia

Le grandezze W e ΔS sono legate dalla relazione

$$W \leq k_B T \Delta S \quad (3.3)$$

valida per ogni valore di δ , ϵ e τ , con l'uguaglianza verificata per $\epsilon = \delta$. Prima di discuterne il significato fisico vediamo nel dettaglio come si ottiene questo risultato. Abbiamo definito il lavoro come

$$W = k_B T \Phi f = k_B T \Phi \ln \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \quad (3.4)$$

perciò l'espressione 3.3 si può riscrivere in questi termini:

$$\Phi \ln \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \leq \Delta S; \quad (3.5)$$

allora il nostro obiettivo è stabilire la non negatività di quella che chiameremo funzione di dissipazione Ω :

$$\Omega \equiv \Delta S - \Phi \ln \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \geq 0. \quad (3.6)$$

Conviene riscrivere il disordine per bit in funzione del parametro di eccesso, che ora indichiamo genericamente con X :

$$S(X) = -\frac{1-X}{2} \ln \frac{1-X}{2} - \frac{1+X}{2} \ln \frac{1+X}{2}. \quad (3.7)$$

Inizialmente studiamo la funzione Ω nel limite quasi statico, cioè nel caso in cui $\tau \rightarrow \infty$: in queste condizioni si ha

$$\Phi \rightarrow \frac{\delta - \epsilon}{2} \equiv \Phi_\infty, \quad \delta' \rightarrow \epsilon, \quad \Delta S \rightarrow S(\epsilon) - S(\delta) \quad (3.8)$$

e di conseguenza

$$\Omega \rightarrow S(\epsilon) - S(\delta) - \frac{\delta - \epsilon}{2} \ln \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \equiv \Omega_\infty. \quad (3.9)$$

Notiamo che per $\epsilon = \delta$ sia Ω_∞ che la sua derivata $\frac{\partial}{\partial \epsilon} \Omega_\infty = \frac{\epsilon - \delta}{1 - \epsilon^2}$ si annullano, inoltre la derivata risulta positiva per $\epsilon > \delta$ e negativa per $\epsilon < \delta$: questo significa che per $\epsilon = \delta$

la funzione Ω_∞ ha un minimo, e in tale minimo assume il valore 0. Da ciò si deduce che $\Omega_\infty \geq 0$.

Ora vogliamo estendere quanto ottenuto al caso in cui τ abbia un valore finito. Possiamo scrivere il flusso come $\Phi = \eta\Phi_\infty$, dove abbiamo indicato con η la quantità fra parentesi quadre nell'equazione 2.23. Attraverso metodi numerici, come abbiamo già detto, si trova che $0 \leq \eta \leq 1$: non è stato possibile dare una spiegazione analitica dell'andamento di η , ma il sospetto è che dipenda dal fatto che gli autovalori della matrice R delle probabilità di transizione per unità di tempo sono tutti reali e non positivi, e di conseguenza il sistema tende in modo monotono all'equilibrio durante ogni intervallo di interazione. Per valori finiti di τ , allora, il parametro δ' è dato da una combinazione lineare di δ ed ϵ :

$$\delta' = \delta - 2\Phi = \delta - 2\eta\frac{\delta - \epsilon}{2} = (1 - \eta)\delta + \eta\epsilon. \quad (3.10)$$

La funzione $S(X)$ ha derivata seconda negativa, perciò utilizzando la definizione di funzione concava otteniamo:

$$S(\delta') \geq (1 - \eta)S(\delta) + \eta S(\epsilon) = S(\delta) + \eta[S(\epsilon) - S(\delta)]. \quad (3.11)$$

Dall'espressione 3.9, tenendo conto che $\Omega_\infty \geq 0$, si trova

$$S(\epsilon) - S(\delta) \geq \Phi_\infty \ln \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \quad (3.12)$$

e arriviamo al così al risultato atteso

$$S(\delta') \geq S(\delta) + \eta\Phi_\infty \ln \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} = S(\delta) + \Phi \ln \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \quad (3.13)$$

che sancisce la non negatività della funzione Ω (eq. 3.6).

La disequazione 3.3 mostra come la quantità di informazione registrata o cancellata durante l'evoluzione del sistema fissi dei limiti alla quantità di lavoro che può essere eseguita o utilizzata dal diavoleto. Quando $\Delta S > 0$ il massimo lavoro che può essere compiuto dal diavoleto sulla massa è stabilito dall'aumento del disordine dei bit. Quando invece $\Delta S < 0$ la riduzione del contenuto di informazione della stringa pone un limite inferiore al lavoro che deve essere fornito al diavoleto dalla massa che cade, poichè, come abbiamo visto, la rimozione di memoria ha un certo costo energetico; nello specifico, considerando il caso in cui tutta l'informazione viene cancellata ($S'_b = 0$), si ritrova il principio di Landauer, $|W| > k_b T S_b$. In sostanza il grado di trasformazione della stringa di bit e il flusso generato dalla rotazione del diavoleto sono intimamente legati.

Infine, è facile intuire che se attribuiamo un significato termodinamico al disordine dei bit, e quindi interpretiamo ΔS come la variazione di entropia della stringa, allora la relazione $W < k_B T \Delta S$ non è altro che il secondo principio della termodinamica (o meglio una sua versione più debole, dal momento che S'_b non tiene conto della correlazione fra i bit in uscita): infatti, se riscriviamo la disequazione 3.3 esplicitando la variazione di entropia del termostato $\Delta S_t = -W/k_B T$, otteniamo

$$\Delta S_t + \Delta S \geq 0. \quad (3.14)$$

La variazione di entropia totale deve essere sempre positiva, quindi ogni volta che il termostato cede calore al diavoleto, permettendogli di sollevare il carico, la diminuzione della sua entropia viene superata dall'aumento di entropia della stringa che acquisisce informazione. Viceversa, quando la memoria viene resettata, il passaggio dal disordine all'ordine è compensato dalla cessione di calore al termostato, che vede così crescere la propria entropia.

Capitolo 4

Conclusioni

Il modello presentato costituisce un esempio concreto di diavoleto di Maxwell, che si distacca dalle speculazioni sui principi generali e affronta il problema del significato fisico dell'informazione attraverso l'analisi dell'interazione fra i suoi componenti. Dallo studio dei parametri e delle quantità notevoli del sistema, infatti, emerge in maniera naturale l'idea di una dipendenza fra lo stato della memoria a disposizione del diavoleto e la sua possibilità di eseguire lavoro. Il dispositivo riproduce perfettamente le caratteristiche dell'essere immaginato da Maxwell e per di più mostra di rispettare il secondo principio della termodinamica: questo modello, quindi, si propone come una risposta esplicita al paradosso sollevato da Maxwell, prestandosi anche alla realizzazione di un prototipo meccanico.

References

- [1] J.C. Maxwell. *Theory of Heat*. Longmans, London, 1871.
- [2] L. Szilárd. “Über die Entropieverminderung in einem thermodynamischen System bei Eingriffen intelligenter Wesen [On the decrease of entropy in a thermodynamic system by the intervention of intelligent beings”. In: *Zeitschrift für Physik* 53 (1929).
- [3] R. Landauer. “Irreversibility and heat generation in the computing process”. In: *IBM J Res Develop* 5 (1961).
- [4] A. Petrosyan S. Ciliberto R. Dillenschneider A. Bérut A. Arakelyan e E. Lutz. “Experimental verification of Landauer’s principle linking information and thermodynamics”. In: *Nature* 483 (2012).
- [5] D. Mandal e C. Jarzynski. “Work and information processing in a solvable model of Maxwell’s demon”. In: *PNAS* 109.29 (2012).